שיעור 4 – לכסון

# משפט

תהא מטריצה A כך שיש לה בסיס של המורכב מווקטורים עצמיים של A. תאה מטריצה שעמודותיה הם וקטורי בסיס זה, אזי אלכסונית.

# תרגיל

. מצא ביטוי מפורש ל

## פתרון

צ"ל ווקטור כך ש  
אותו דבר עבור

# עובדות

לכל A וB ריבועיות התכונות הבאות שקולות

1. לכסינה
2. לכסינה
3. A,B לכסינות

# תרגיל

1. הוכח כי לכל , לא לכסינה.
2. תהא ותהא . הוכח כי אינה לכסינה.  
   (תשובה: כי אינה לכסינה, והעובדה שרשמנו לפני 2 דקות)
3. תהא A דומה ל. האם A לכסינה?

## תשובה(לג')

השאלה היא האם לכסינה?  
 לא לכסינה לכן לא לכסינה.

# הערה חשובה

דירוג ≠ לכסון

# סימון

קבוצת הערכים העצמיים של מטריצה A או העתקה לינארית(אופרטור) T נקראת ספקטרום של A או T ומסומנת

# תרגיל

תהיינה A וB כך שלפחות אחת מהן הפיכה. הוכח כי

## רעיון להוכחה

בה"כ נגיד כי A הפיכה. ⇦ . המטריצות דומות ולכן לפי משפט יש להן אותו פולינום אופייני.

# הגדרות

1. המעלה של בפולינום האופייני נקראת הריבוי האלגברי של .
2. המימד של נקרא הריבוי הגיאומרטי של נקרא הריבוי הגיאומטרי של .

# הערות

1. סכום הריבועים האלגבריים [כאשר השדה הוא סגור אלגברית כמו למשל ] הוא n כאשר   
   דוגמה: , . הריבוי האלגברי של i הוא 2 והריבוי האלגברי של 1 הוא 1 - .
2. הריבוי הגיאומטרי תמיד קטן-שווה מהריבוי האלגברי.

# תרגיל

הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. A לכסינה
2. לכל ע"ע של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי של
3. סכום הריבועים הגיאומטריים של הערכים העצמיים שווה לn כאשר

## תשובה

(א)⇦(ב)  
 *⇦   
יהיו ע"ע. נניח בשלילה כי ⇦   
 ⇦ A לא לכסינה(המשיכו בבית...)*

# משפט(קיילי-המילטון)

תזכורת – אם פולינום אזי ,

# תרגיל

. מצא את הפולינום האופייני ובעזרתו מצא את

## פתרון

*לפי משפט קיילי המילטון ⇦*

# שאלה ממבחן 2010 מועד א'

1)א. יהי V מ"ו ממימד סופי. אופרטור לינארי. הוכח כי אם לV קיים בסיס B כך ש אלכסונית אזי לכל ע"ע של T הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.

## פתרון

אלכסונית ⇦ . ⇦ ⇦ ווקטור עצמי לT מההגדרה.  
כלומר, B הוא בסיס לV המורכב מווקטורים עצמיים של T. ממשפט ידוע זה אומר שהריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.

# הגדרה

1. . . בפרט
2. הפולינום המינימלי של A הוא הפולינום המתוקן מהמעלה הקטנה ביותר ב

# עובדות

1. ⇦
2. A או B הפיכה ⇦

# אלגוריתם למציאת הפולינום המינימלי

1. עבור מוצאים פתרון כללי למערכת
2. בוחרים את הקומבינציה עם הכי הרבה אפסים משמאל.
3. הפולינום מהמעלה הנמוכה ביותר ב ( בקומבינציה) הוא , והפולינום המינימלי יהיה

# תרגיל

1. מצא את הפולינום המינימלי של
2. מצא כנ"ל ל

## פתרון לא'

מתאפס בA לכל . נבחר ב.